第二节 一阶微分方程

形如 $y' = f(x, y)$ 或 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

的微分方程称为一阶微分方程。

后者x与y对称，既可以把x看作自变量，

也可把y看作自变量.

一、分离变量法

如果一个一阶微分方程能写成 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式，则原方程称为**可分离变量的微分方程.**

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}} dy = 2x^2 dx,$

可分离变量的微分方程的解法

设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$是依次为$g(y)$和$f(x)$的原函数, $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的通解.

例1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

即

$$y=\begin{cases}e^{x^3+C_1}=e^{C_1}\cdot e^{x^3}, & y>0\\ -e^{x^3+C_1}=-e^{C_1}\cdot e^{x^3}, & y<0\end{cases}$$

统一写成 $y=Ce^{x^3}$

其中 $C=\pm e^{C_1}$ 为任意常数

例1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解:分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

说明:在求解过程中每一步不一定是同解变形,因此可能增、减解.

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或

$$\boxed{\ln|y|=x^3+\ln|C|}$$

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}e^{x^3}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=Ce^{x^3}$ （C 为任意常数）

分离变量时丢失了解 $y=0$, 但取 $C=0$ 又找回此解

例1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解:分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\boxed{\ln|y|=x^3+C_1}$

所以 $y=Ce^{x^3}$ (C 为任意常数)

由于 $C=\pm e^{C_1}$

$\boxed{\ln|y|=x^3+\ln|C|}$

例2. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

解：分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = -\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （C 为任意常数）

由初始条件得 $C=1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

例3. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时($t=0$) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\int\frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\dfrac{1}{k}\ln(mg-kv)=\dfrac{t}{m}+C$ (此处 $mg-kv>0$)

利用初始条件, 得 $C=-\dfrac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v=\dfrac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时

$v\approx\dfrac{mg}{k}$

齐次方程： 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 的微分方程。

如： $y'=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$.

解法 作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$， 即 $y=xu$,

u是关于x的函数，两边对x求导 $\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原式 $u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$, 可分离变量的方程

即 $\dfrac{du}{f(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$.

两边积分，得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,u}{f(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u,便得原方程的通解.

例4. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

解：令 $u = \frac{y}{x}$, $y = u\,x$, 则 $y' = u + x\,u'$, 代入原方程 得

$$u + x\,u' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}\,u = \frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}\,u = \int\frac{\mathrm{d}\,x}{x}$$

得 $\ln\left|\sin u\right| = \ln\left|x\right| + \ln\left|C\right|$, 即 $\sin u = C\,x$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x} = C\,x$ （C 为任意常数）

例5. 解微分方程 $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解：方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，

则有 $u+xu'=2u-u^2$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$， 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$

代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy$ (C 为任意常数)

例6. 解微分方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})y\,\mathrm{d}x=(x-y)\,\mathrm{d}y.$

解：方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}\left(\dfrac{x}{y}-1\right),$

令 $u=\dfrac{x}{y}$, 则有 $\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$ 代入方程并分离变量得

$$\frac{1+e^{-u}}{1+ue^{-u}}du=-\frac{\mathrm{d}y}{y}\quad \text{即}\quad \frac{1+e^{u}}{u+e^{u}}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

积分得 $\ln\left|u+e^{u}\right|=-\ln|y|+\ln|C|$, 即 $y(u+e^{u})=C$

代回原变量得通解 $x+ye^{\frac{x}{y}}=C$ （C 为任意常数)

说明：

形如 $\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$ 时令 $u=\dfrac{y}{x}$

形如 $\dfrac{dx}{dy}=f(\dfrac{x}{y})$ 时可令 $u=\dfrac{x}{y}$

二、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$, 上述方程称为齐次方程.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上述方程称为非齐次方程.

一阶线性微分方程的**解法**

1. 线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \quad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

1. 线性齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

2. 线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

猜测解的形式为：$y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$

代入方程求出待定函数 $u(x)$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

作变换 $y = \underline{u(x)e}^{-\int P(x)dx}$ 则

$$u' e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - \cancel{P(x) u e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} + \cancel{P(x) u e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}} = Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两端积分得 $$u = \int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C$$

故原方程的通解 $$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C\right]$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

1. 线性齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

2. 线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=x^2\csc x$.

解：这是一个非齐次线性方程

由一阶线性方程通解公式, 得

$$y=e^{-\int\cot x\,dx}\left[\int x^2\csc x\,e^{\int\cot x\,dx}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$\int\cot x\,dx=\ln|\sin x|+C_1$$

$$上式=e^{-\ln|\sin x|-C_1}\left[\int x^2\csc x\cdot e^{\ln|\sin x|+C_1}dx+C_2\right]$$

$$=e^{-C_1}\cdot\frac{1}{|\sin x|}\left[\int x^2\csc x\cdot e^{C_1}\cdot|\sin x|\,dx+C_2\right]$$

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=x^2\csc x$.

$$y=e^{-\int \cot x\,dx}\left[\int x^2\csc x\, e^{\int \cot x\,dx}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$\int \cot x\ dx=\ln|\sin x|+C_1$ 不妨视 $\int \cot x\ dx=\ln|\sin x|$

$$上式=e^{-C_1}\cdot\frac{1}{|\sin x|}\left[\int x^2\csc x\cdot e^{C_1}\cdot|\sin x|dx+C_2\right]$$

$$=\frac{1}{\sin x}\left[\int x^2\csc x\cdot\sin x dx\pm e^{-C_1}\cdot C_2\right]$$

$$=e^{-\ln|\sin x|}\left[\int x^2\csc x\cdot e^{\ln|\sin x|}dx+C\right]$$

例1. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\cot x=x^2\csc x$.

解：这是一个非齐次线性方程

由一阶线性方程通解公式, 得

$$y=e^{-\int\cot x\,dx}\left[\int x^2\csc x\, e^{\int\cot x\,dx}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^{-\ln|\sin x|}\left[\int x^2\csc x\cdot e^{\ln|\sin x|}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{\sin x}\left[\int x^2\csc x\cdot\sin x\ \mathrm{d}x+C\right]=\frac{1}{\sin x}\left(\frac{x^3}{3}+C\right)$$

故原方程通解为 $\quad y=\csc x\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)$

例2. 解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$.

解: 这是一个非齐次线性方程

由一阶线性方程通解公式, 得

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{(x+1)}dx}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot(x+1)^{-2}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

故原方程通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$

例4. 解方程 $2y^2dy - ydx = -ydy + xdy.$

解：原方程变形为 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2y^2 + y - x}$ 即 $\dfrac{dx}{dy} = 2y + 1 - \dfrac{x}{y}$

亦即 $\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{x}{y} = 2y + 1$ 形如 $\dfrac{dx}{dy} + p(y)x = Q(y)$

通解为: $x = e^{-\int P(y)\mathrm{d}y}\left[\int Q(y)e^{\int P(y)\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C\right]$

通解为 $x = e^{-\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}\left[\int (1+2y)\, e^{\int \frac{\mathrm{d}y}{y}}\mathrm{d}y + C\right]$

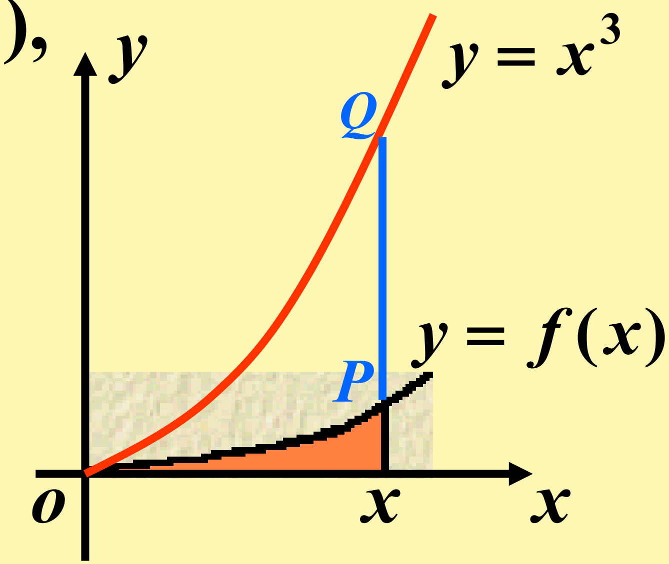
$$= \frac{1}{y}\left[\int (1+2y)\cdot y\ \mathrm{d}y + C\right] = \frac{1}{y}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{2}{3}y^3 + C\right)$$

例5 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\ge 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

解 $\int_0^x f(x)dx = x^3 - f(x)$, $\int_0^x f(t)\,dt = x^3 - f(x)$,

两边求导得 $f(x) = 3x^2 - f'(x)$,

$$y' + y = 3x^2$$



解此微分方程

$$y = e^{-\int dx}\left[\int 3x^2 e^{\int dx} dx + C\right]$$

$$= e^{-x}\left[\int 3x^2 e^x dx + C\right] = Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

例5 如图所示，平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

解

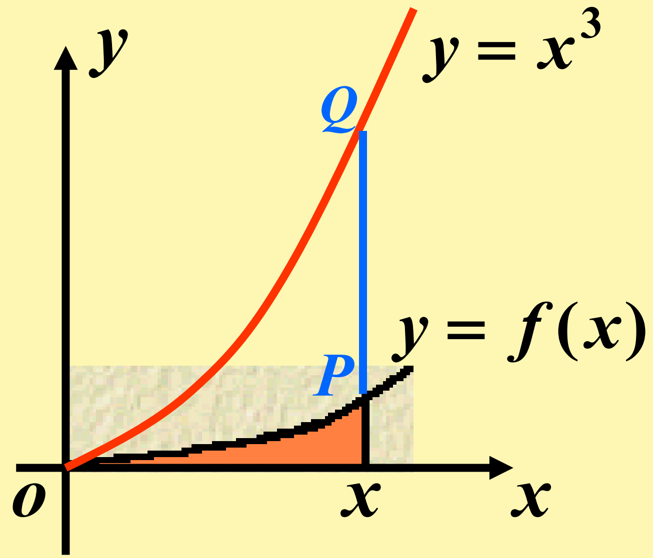
$$y=e^{-\int dx}\left[\int 3x^2 e^{\int dx}dx+C\right]$$

$$=Ce^{-x}+3x^2-6x+6,$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=-6$,

所求曲线为

$$y=3(-2e^{-x}+x^2-2x+2).$$



伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

两端除以 y^n，得 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$

注意到 $\dfrac{dy^{1-n}}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

解法：经过变量代换化为线性微分方程.

令$z=y^{1-n}$， 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$,

代入上式 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

$$z=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即可

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

例6. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$代入，得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

例7 用适当的变量代换解微分方程:

$$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2};$$

解法一 $(y^2)' + 2x(y^2) = xe^{-x^2}$

令 $z = y^2$， 则 $\dfrac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$，

$$z = e^{-\int 2xdx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C]$$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}(\dfrac{x^2}{2} + C).$

解法二 $y' + xy = \dfrac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$，令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$，

则 $\dfrac{dz}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$， $\therefore \dfrac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$